Economie de l'assurance M1 ES

Avril 2019

<u>Exercice 1 : prime de risque et équivalent certain</u>

Considérons un individu avec une richesse initiale de 10€ faisant face à une loterie $\tilde{x} = (-6, 0.5; +6, 0.5)$. Supposons que cet individu à la fonction d'utilité suivante :

$$u(x) = \begin{cases} x, & x \leq 10 \\ \frac{1}{2}x + 5, & x > 10 \end{cases}$$

(a) Tracez la fonction d'utilité, est-elle globalement concave ? L'individu est-il averse au risque ?
(b) Calculez la prime de risque et l'équivalent certain de cet individu associé à $\tilde{x}$. Montrez-le sur le graphique.
(c) Peut-on appliquer l'approximation d'Arrow-Pratt ? Pourquoi ?
(d) Considérons maintenant la loterie $\tilde{y} = (-3, 0.5; +3, 0.5)$. Calculez la risque de prime associé à $\tilde{y}$. Est-elle plus petite que pour $\tilde{x}$? Pourquoi ?

<u>Correction :</u>

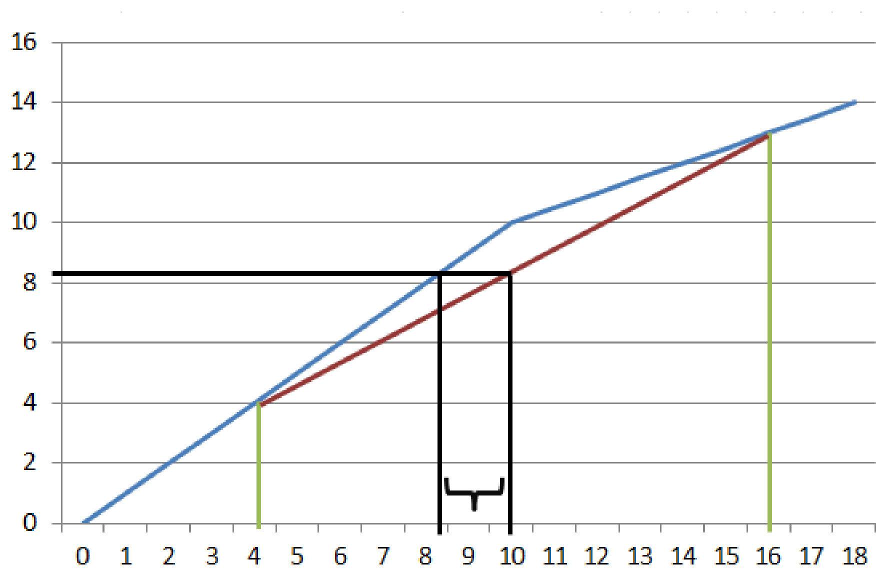
(a) f est concave ssi $\forall x$ et y dans son domaine, et pour tout $t \in (0,1)$, nous avons :

$$f(tx + (1-t)y) \geq tf(x) + (1-t)f(y)$$

(b) La prime de risque est définie comme le montant que l'individu est prêt à payer pour ne pas supporter le risque lié à la loterie $\tilde{x}$.

$$E\big(U(w_0 + \tilde{x})\big) = U(w_0 + e) \Leftrightarrow \frac{1}{2}U(4) + \frac{1}{2}U(16) = U(10 + e) \Leftrightarrow \frac{17}{2} = 10 + e \Leftrightarrow e = -\frac{3}{2}$$

L'équivalent certain est donc le montant certain procurant la même utilité espéré que l'espérance d'utilité suite à une richesse exposée à une loterie (i.e $\frac{17}{2}$)



(c) Approximation d'Arrow-Pratt permet de calculer la prime de risque d'une loterie à « petit risque » ayant une espérance proche ou égale à zéro.

Soit une loterie $\tilde{z}\ ave\ E(\tilde{z}) = 0$ Nous avons :

$$E(U(W+\tilde{z}) = U(W-\pi)$$

$$(taylor\ 2nd\ ordre)E(U(W+\tilde{z}) \approx E\left(U(W) + U'(W)\tilde{z} + \frac{U''(W)}{2}\tilde{z}^2\right)$$

$$= U(W) + U'(W)(-\text{-}\pi)(taylor\ 1er\ ordre)$$

$$\Leftrightarrow U(W) + U'(W)E\tilde{z} + \frac{U''(W)}{2}E\tilde{z}^2 = U(W) + U'(W)(-\text{-}\pi)$$

$$or\ E\tilde{z} = 0\ donc\ E\tilde{z}^2 = \sigma^2\ ;\ E(X-EX)^2 = V(x)$$

$$donc - \text{-}\pi = \frac{1}{2}\frac{U''(W)}{U'(W)}\sigma^2$$

De plus,-$\frac{U''(W)}{U'(W)} = ARA\ (absolute\ risk\ aversion)$ mesure d'Arrow-Pratt du risque (dépendant de la pente de la courbe d'utilité positif si averse au risque)
Ici nous ne pouvons pas calculer par l'approximation car la fonction d'utilité n'est pas différenciable.

(d) $\frac{1}{2}U(7) + \frac{1}{2}U(13) = 10 - e \Leftrightarrow e = -0.75\ plus\ faible\ car\ \tilde{z} = w + \tilde{x}\ a\ une\ espérance\ d'utilité\ plus\ élevé\ tout\ en\ concervant\ une\ lotterie\ de\ même\ espérance.$

<u>Exercice 2 : Assurance en information parfaite</u>

Un individu dispose d'une richesse initiale w et d'une propriété sujette à un risque d'incendie, de valeur L. Pour se protéger contre le risque l'individu peut souscrire une police d'assurance. L'assureur et l'individu ont le même à priori sur la probabilité d'incendie : p . L'individu peut décider du niveau de couverture q. L'assureur demande une prime d'assurance x et s'engage à indemniser l'assuré à hauteur de q en cas d'incendie.

On note $\pi(q,x,p)$ la fonction objectif de l'assureur supposé neutre vis-à-vis du risque et $u(w)$ la fonction d'utilité de l'individu.

(a) Quelle est l'utilité de réserve de l'individu ?
(b) Calculer le contrat Optimal (q^*, x^*) qui serait offert par l'assureur à un agent ayant une aversion pour le risque ?
(c) Combien coutera la prime x :
- **l'individu est neutre vis-à-vis du risque ?**
- **il y a concurrence pure et parfaite sur le marché de l'assurance ?**

(d) Montrer que si l'assureur et l'individu sont tous les deux averse au risque, ils signeront un contrat de coassurance (i.e. $q^* < L$).

<u>Correction :</u>

(a) $\bar{u} = pU(W) + (1-p)U(W-L)$
(b) Hyph : Agent averse au risque $u''(w) < 0$
- Définir une contrainte de participation :

$$pU(w-x+q-L) + (1-p)U(W-x) \geq \bar{u}$$

- Définir la fonction objectif : $p(x-q) + (1-p)x = x - pq\ linéaire$

Le problème : $\max_{\{x,q\}} x - pq\ \ sc. pU(w-x+q-L) + (1-p)U(W-x) \geq \bar{u}$
On pose le lagrangien :

$$x - pq + \lambda(\ pU(w-x+q-L) + (1-p)U(W-x))$$

Condition de Kuhn-Tucker(KT)

$$\frac{d\mathcal{L}}{dx} = 1 + \lambda\big(-pu'(w-x+q-L) - (1-p)u'(w-x)\big) = 0 \ (1)$$
$$\frac{d\mathcal{L}}{dq} = -p + \lambda\big(pu'(W-x+q-L)\big) = 0 \ (2)$$
$$\frac{d\mathcal{L}}{d\lambda} = pU(w-x+q-L) + (1-p)U(W-x) - \bar{u} = 0 \ contrainte\ saturée$$
Car profit fonction croissante de x et décroissante de q et fonction de la contrainte décroissante avec x et croissante avec q.

$$(1)\lambda = -\frac{1}{-pu'(w-x+q-L) - (1-p)u'(w-x)}$$

$$(2)\ \lambda = \frac{p}{pu'(W-x)}$$

$$(1) + (2)\ u'(W-x+q-L) = pu'(w-x+q-L) + (1-p)u'(w-x)$$
$$\Leftrightarrow u'(W-x+q-L) = u'(w-x)$$
L'individu étant averse au risque $u'(w) est\ monotone\ décroissante$ $(u''(w) < 0)$.
Nous avons donc $q^* = L$
Avec $q^* = L$ nous pouvons déterminer x^* :
$$(3)\ pU(w-x+L) + (1-p)U(W-x+L)) = pU(W) + (1-p)U(W+L)$$
$$\Leftrightarrow U(W-x+L) = pU(W) + (1-p)U(W+L) = \bar{u}$$
$$\Leftrightarrow x^* = W + L - U^{-1}(\bar{u})$$

On s'assure qu'il s'agit bien d'un maximum et non d'un minimum et que la contrainte est bien respectée :

- La contrainte est saturée donc respectée (3)
- Calcul de la Hessienne

$$\mathrm{H} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial^2 x} & \frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial x\partial q} \\ \frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial q\partial x} & \frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial^2 q} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \lambda(-u'(w-x+q) + xu''(w-x+q) + (1-p)u''(w-x+L)) & \lambda\big(-xu''(w-x+q)\big) \\ -\lambda\big(pu''(W-x+q)\big) & \lambda\big(pu''(W-x+q)\big) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda\big(-u'\big(U^{-1}(\bar{u})\big) + (W+L-U^{-1}(\bar{u}))u''(U^{-1}(\bar{u})) + (1-p)u''(U^{-1}(\bar{u}))\big) & \lambda\big(-(W+L-U^{-1}(\bar{u}))u''(U^{-1}(\bar{u}))\big) \\ -\lambda\big(pu''(U^{-1}(\bar{u}))\big) & \lambda\big(pu''(U^{-1}(\bar{u}))\big) \end{pmatrix}$$

$$\det(H) = \lambda^2\left(-u'\big(U^{-1}(\bar{u})\big) + \big(W+L-U^{-1}(\bar{u})\big)u''\big(U^{-1}(\bar{u})\big) + (1-p)u''\big(U^{-1}(\bar{u})\big)\right)\left(pu''\big(U^{-1}(\bar{u})\big)\right)$$
$$- \lambda^2\left(\big(W+L-U^{-1}(\bar{u})\big)u''^{\left(U^{-1}(\bar{u})\right)}\right)\left(pu''\big(U^{-1}(\bar{u})\big)\right)$$
$$\det(H) = \lambda^2\left(-u'\big(U^{-1}(\bar{u})\big) + (1-p)u''\big(U^{-1}(\bar{u})\big)\right)\left(pu''\big(U^{-1}(\bar{u})\big)\right) > 0$$
Définit négative car $u'' < 0$ donc $\det(H) > 0\ et\ Tr(H) < 0$
Donc la solution est bien un maximum. (Pas un point selle les deux valeurs propres sont de même signes).

On peut aussi indiquer que la fonction objectif est une fonction concave puisque c'est une combinaison linéaire de fonction affines et concave (u(x) étant concave).

(c)

- L'individu est neutre vis-à-vis du risque ce qui signifie que

$$EU(x) = UE(x)$$

Nous avons donc la contrainte de participation suivante :

$$pU(W+Q-x-L)+(1-p)U(W-x) \geq pU(W-L)+(1-p)U(W)$$
$$\Leftrightarrow U\big(p(W+Q-x-L)+(1-p)(W-x)\big) \geq U(p(W-L)-(1-p)W)$$
$$\Leftrightarrow pq \geq x$$

Or l'assureur maximise :

$$x - pq$$

Donc le seul contrat accepté par l'individu qui maximise le profit de la firme ($=0$) est $x^* = pq$
Pour tout niveau de garantie choisit par l'individu.

- Il y a CPP : la firme ne fait pas de profit : $x - pq = 0$ or nous avons vu que si l'agent est risque averse et que l'assureur est neutre vis-à-vis du risque, l'agent se couvre totalement vis-à-vis du risque ainsi : $x^* = pL$

4) L'assureur est averse au risque on introduit une « fonction d'utilité » de l'assureur $B(.)\ tq\ B'(.) > 0 et\ B''(.) < 0$.

On réécrit le problème de maximisation

$$\max_{\{x,q\}}(1-p)B(x)+p(B(x-q))\ \ sc.\, pU(w-x+q-L)+(1-p)U(W-x) \geq \bar{u}$$

On pose le Lagrangien :

$$\mathcal{L} = (1-p)B(x)+p\big(B(x-q)\big)+\lambda(p\, pU(w-x+q-L)+(1-p)U(W-x)-\bar{u})$$

Condition KT :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = (1-p)B'(x)+pB'(x-q)+\lambda\big(-pU'(w-x+q-L)\big)-(1-p)U'(W-x) = 0\ (1)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = -pB'(x-q)+\lambda\big(pU'(w-x+q-L)\big)(2)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = (pU(w-x+q-L)+(1-p)U(W-x)-\bar{u}) = 0\ contrainte\ saturé$$

$$(1)+(2)\lambda = \frac{(1-p)B'(x)+pB'(x-q)}{\big(pU'(w-x+q-L)\big)+(1-p)U'(W-x)} = \frac{B'(x-q)}{pU'(w-x+q-L)}$$

$$p+\frac{(1-p)U'(W-x)}{U'(W-x+q-L)} = p+\frac{(1-p)B'(x)}{B'(x-q)} \Leftrightarrow \frac{U'(W-x)}{U'(W-x+q-L)} = \frac{B'(x)}{B'(x-q)}$$

Numérateur : état de la nature si pas d'incendie
Dénominateur : état de la nature si incendie

Condition d'Arrow : égalité des utilités marginales relatives des deux agents averses aux risques→ partage du risque (autrement dit nous avons bien un équilibre Pareto optimal définit dans la boite d'Edgeworth comme le point tangent des fonctions d'utilité des deux agents).

Si les agents partage le risque nous avons : $W-x > W-x+q-L\ et\ x > x-q$

Etant donné que $B\ et\ U$ sont concave nous avons : $\frac{B'(x)}{B\prime(x-q)} < 1$ car $B'est\ d$écroissant étant donné $B'' < 0$

Ainsi : $\frac{U'(W-x)}{U'(W-x+q-L)} < 1 \Leftrightarrow U'(W-x) < U'(W-x+q-L) \Leftrightarrow W-x > W-x+q-L \Leftrightarrow L > q$