Séance 3 – Aléa Moral et Assurance

Mai 2019

On considère le problème d'assurance avec aléa moral suivant.

Un agent veut assurer sa propriété contre un risque d'incendie. La probabilité qu'un incendie survienne dépend du comportement de « prévention » de l'agent. Précisément, cette probabilité donnée par $p_1 = \frac{2}{5}$ *si l'individu adopte un comportement « précautionneux », et par* $p_0 = \frac{3}{5}$ *s'il adopte un comportement « négligeant ». On notera l'effort de prévention par e ∈ {0, 1}, avec 0 pour un comportement négligeant, et 1 pour un comportement précautionneux.*

En l'absence d'incendie, l'individu dispose d'une richesse $y = 100$. *On suppose que le dégât provoqué par un incendie se traduit par une perte monétaire de 100. le comportement de notre agent est modélisé par la fonction d'utilité de VNM suivante :* $u(c,e) = \sqrt{c} - e$, *avec c sa richesse, et e le coût lié à l'effort de prévention.*

L'assureur maximise son profit espéré. Il est en situation de monopole, et peut donc faire une offre à prendre ou à laisser à l'assuré.

1) *On veut tout d'abord caractériser l'utilité de réserve de l'individu, lorsqu'il supporte lui-même tout le risque lié à la survenue éventuelle d'un dégât d'incendie.*
   Ecrire le comportement de l'agent dans ce cas. Pour les valeurs numériques choisies, montrer que son utilité de réserve est donnée par $\underline{u} = 5$.

Si il ne fait pas d'effort : $\frac{2}{5}\sqrt{100} - \frac{3}{5}\sqrt{0} = \frac{2}{5} \times 10 = 5$

Si il fait un effort : $\frac{3}{5}\sqrt{100} - \frac{2}{5}\sqrt{0} - 1 = \frac{3}{5} \times 10 - 1 = 5$

L'individu est indifférent entre faire un effort ou non lorsqu'il n'est pas assuré et son utilité de réserve est de 5.

2) *On analyse maintenant la relation d'assurance. On suppose que les contrats d'assurance spécifie un remboursement* $\alpha \geq 0$ *dans l'état du monde « incendie », et une prime* $\beta \geq 0$ *dans l'état « pas d'incendie ». L'assuré a donc une utilité égale à* $\sqrt{\alpha} - e$ *en cas d'incendie, et à* $\sqrt{y - \beta} - e$ *sinon. Ecrire le programme de maximisation de l'assureur dans la situation de premier rang (lorsqu'il observe l'effort de l'agent) . Caractériser cette situation. Justifier en particulier que* $\alpha = y - \beta$. *On interprétera cette condition.*

L'assureur maximise :

$$\max_{\{\beta,\alpha\}} (1 - p_e)\beta - p_e\alpha$$

$$sc\ (CP)\ p_e\sqrt{\alpha} + (1 - p_e)\sqrt{100 - \beta} - e \geq 5$$

La contrainte de participation est saturée :

$$\frac{d\pi}{d\beta} > 0\ et\ \frac{dCP}{d\beta} < 0\ ;\ \frac{d\pi}{d\alpha} < 0\ et\ \frac{dCP}{d\alpha} > 0$$

Lagrangien :

$$L(\beta, \alpha, \lambda) = (1 - p_e)\beta - p_e\alpha + \lambda(p_e\sqrt{\alpha} + (1 - p_e)\sqrt{100 - \beta} - e - 5)$$

La fonction objectif est strictement concave -> CPO nécessaire et suffisante :

$$\frac{dL}{d\beta} = 0 = (1-p_e) - \lambda \frac{(1-p_e)}{2\sqrt{100-\beta}} \ (1)$$

$$\frac{dL}{d\alpha} = 0 = -p_e + \frac{\lambda p_e}{2\sqrt{\alpha}} (2)$$

$$\frac{dL}{d\lambda} = 0 \ avec\ \lambda > 0 \Leftrightarrow p_e\sqrt{\alpha} + (1-p_e)\sqrt{100 - \beta} - e = 5 \ (3)$$

$$(1) et\ (2)\ on\ a\ \lambda = 2\sqrt{100-\beta} = 2\sqrt{\alpha} \ \Leftrightarrow 100-\beta = \alpha$$

Tout le risque est transféré à l'assureur puisqu'il est neutre vis-à-vis du risque et que l'agent est averse au risque : la richesse dans les deux états de la nature sont égale pour l'assuré.

En utilisant (3) le contrat optimal pour chaque effort :

$p_e\sqrt{\alpha} + (1-p_e)\sqrt{\alpha} - e = 5 \Leftrightarrow \sqrt{\alpha} - e = 5 \Leftrightarrow \alpha^* = (5+e)^2$ et $\beta^* = 100 - (5+e)^2$

Le profit de l'assureur pour $e = 0$ est $\frac{2}{5}75 - \frac{3}{5}25 = 15$

Le profit de l'assureur pour $e = 1$ est $\frac{3}{5}64 - \frac{2}{5}36 = 24$

L'assureur proposera donc uniquement le contrat pour l'effort $e = 1$, puisqu'il peut contrôler l'effort et que les individus sont indifférent entre les deux contrats (contrainte de participation saturée).

En d'autres mots, le contrat sera donc un contrat à couverture complète avec une prime commerciale de 64.

On suppose pour la suite que l'effort de prévention de l'assuré est inobservable.

3) *Déterminer, en fonction du contrat offert, le comportement de prévention de l'individu. En particulier, quel est l'effort de l'assuré si l'assureur offre le contrat de premier rang ? Interpréter.*

Si l'assureur propose uniquement le contrat de premier rang sans pouvoir contrôler l'effort alors il fera face à de l'aléa moral diminuant donc son profit.

En effet l'individu souscrira le contrat mais ne fera pas d'effort puisque l'effort est couteux.

Le profit de l'assureur sera alors :

$$\frac{2}{5}64 - \frac{3}{5}36 = 4$$

4) *On suppose pour cette question qu'il est optimal pour l'assureur d'amener l'assuré à adopter l'effort $e^* = 1$.*
   a. *Ecrire le programme de maximisation de l'assureur.*

L'assureur doit inclure dans son programme d'optimisation un contrainte d'incitation en plus de la contrainte de participation.

$$\max_{\{\beta,\alpha\}} \frac{3}{5}\beta - \frac{2}{5}\alpha$$

$$sc\ (CP)\frac{2}{5}\ \sqrt{\alpha}+\frac{3}{5}\sqrt{100\ -\ \beta}-1\geq 5$$

$$(CI)\ \frac{2}{5}\ \sqrt{\alpha}+\frac{3}{5}\sqrt{100\ -\ \beta}-\ 1\geq \frac{3}{5}\ \sqrt{\alpha}+\frac{2}{5}\sqrt{100\ -\ \beta}$$

b. *Montrer qu'à l'optimum de ce programme, les deux contraintes sont saturées. (On commencera par montrer que la contrainte de participation est saturée.) Ce résultat pourra être admis pour la suite).*

Comme vu précédemment :

$$\frac{d\pi}{d\beta}>0\ et\ \frac{dCP}{d\beta}<0\ ;\ \frac{d\pi}{d\alpha}<0\ et\ \frac{dCP}{d\alpha}>0$$

Donc la CP est saturée.

Deux cas :

(CI) non saturée et (CI) saturée

Si (CI) non saturée :

$$L(\beta,\alpha\ ,\lambda)=(1-p_e)\beta-p_e\alpha+\lambda\big(p_e\sqrt{\alpha}+(1-p_e)\sqrt{100\ -\ \beta}-\ e-5\big)+\mu(\frac{2}{5}\ \sqrt{\alpha}$$
$$+\frac{3}{5}\sqrt{100\ -\ \beta}-\ 1-\frac{3}{5}\ \sqrt{\alpha}+\frac{2}{5}\sqrt{100\ -\ \beta})$$

Avec $\mu=0\ et\ \frac{2}{5}\ \sqrt{\alpha}+\frac{3}{5}\sqrt{100-\beta}-\ 1-\frac{3}{5}\ \sqrt{\alpha}+\frac{2}{5}\sqrt{100-\beta}>0$

Or on retombe dans le cas vu précédemment et on peut montrer que (CI) n'est pas respecté.

Le profit est égal à 24.

SI (CI) saturée :

On a :

$$\frac{2}{5}\ \sqrt{\alpha}+\frac{3}{5}\sqrt{100\ -\ \beta}-\ 1-\frac{3}{5}\ \sqrt{\alpha}-\frac{2}{5}\sqrt{100\ -\ \beta}=0$$

Et

$$\frac{2}{5}\ \sqrt{\alpha}+\frac{3}{5}\sqrt{100\ -\ \beta}-1=5$$

c. *Caractériser le contrat optimal, toujours sous l'hypothèse que* $e^*\ =\ 1$. *Déterminer le profit espéré de l'assureur.*

$$\frac{2}{5}\ \sqrt{\alpha}+\frac{3}{5}\sqrt{100\ -\ \beta}=6$$

Et

$$\frac{1}{5}\sqrt{100\ -\ \beta}-\frac{1}{5}\ \sqrt{\alpha}=1$$

Ainsi :

$$\alpha^{*}=9\ et\ \beta^{*}=36$$

Ce qui donne une prime commerciale de 36 et une couverture non complète avec une franchise de 55 (i.e. α correspond au montant remboursé moins la prime soit un montant de sinistre remboursé égal à (45 sur une perte de 100).

Le profit de l'assureur est donc de :

$$\frac{3}{5}36-\frac{2}{5}9=18$$

5) *On suppose maintenant qu'il est optimal pour l'assureur d'amener l'assureur à faire l'effort* $e^{*}\ =\ 0$*. Ecrire le programme de maximisation correspondant. Justifier que la contrainte d'incitation peut-être éliminée. Déterminer le profit de l'assureur dans ce cas.*

Dans ce cas l'individu n'aura jamais intérêt à faire un effort.

La contrainte de participation est saturée pour les même raison que précédemment.

De plus l'effort est couteux → cela renvoi au cas ou l'agent observe l'effort

Le profit est de 15.

6) *Quel est donc le contrat optimal en asymétrie d'information ?*

Le contrat optimal est donc le contrat procurant le plus de profit entre le contrat sans effort et celui avec incitation. C'est donc le contrat $\alpha^{*}=9\ et\ \beta^{*}=36$.

7) *Calculer la perte–pour l'assureur–liée à l'inobservabilité du comportement de l'assuré. Est-il optimal que l'assuré supporte une partie du risque ? Justifier votre réponse.*

Le coût de l'asymétrie d'information est donc de (24-18)=6.

Il est optimal que l'assuré supporte une partie du risque afin qu'il fournisse un effort.