TD1 : Economie de l'assurance M1 SAF

Mars 2016

1er session : Théorie de la décision en information symétrique

<u>Exercice 1 : Introduction</u>

Considérons un individu avec une richesse initiale de 10€ faisant face à une loterie $\tilde{x} = (-6, 0.5; +6, 0.5)$. Supposons que cet individu à la fonction d'utilité suivante :

$$u(x) = \begin{cases} x, & x \leq 10 \\ \frac{1}{2}x + 5, & x > 10 \end{cases}$$

(a) Tracez la fonction d'utilité, est-elle globalement concave ? L'individu est-il averse au risque ?
(b) Calculez l'équivalent certain de cet individu associé à $\tilde{x}$. Montrez-le sur le graphique.
(c) Peut-on appliquer l'approximation d'Arrow-Pratt ? Pourquoi ?
(d) Considérons maintenant la loterie $\tilde{y} = (-3, 0.5; +3, 0.5)$. Calculez la risque de prime associé à $\tilde{y}$. Est-elle plus petite que pour $\tilde{x}$? Pourquoi ?

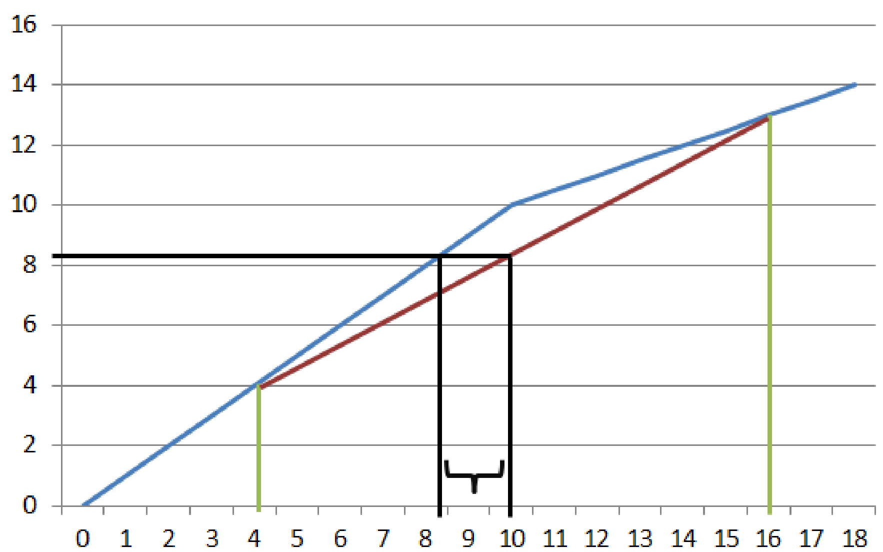
<u>Correction :</u>

(a) f est concave ssi $\forall x$ et y dans son domaine, et pour tout $t \in (0,1)$, nous avons :

$$f(tx + (1-t)y) \geq tf(x) + (1-t)f(y)$$

(b) La prime de risque est définie comme le montant que l'individu est prêt à payer pour ne pas supporter le risque lié à la loterie $\tilde{x}$.

$$E\big(U(w_0 + \tilde{x})\big) = U(w_0 + e) \Leftrightarrow \frac{1}{2}U(4) + \frac{1}{2}U(16) = U(10 + e) \Leftrightarrow \frac{17}{2} = 10 + e \Leftrightarrow e = -\frac{3}{2}$$



(c) Approximation d'Arrow-Pratt permet de calculer la prime de risque (ou équivalent certain) d'une loterie à « petit risque » ayant une espérance proche ou égale à zéro.
Soit une loterie $\tilde{z}$ ave $E(\tilde{z}) = 0$ Nous avons :

$$E(U(W + \tilde{z}) = U(W - \pi)$$

$$(taylor\ 2nd\ ordre) E(U(W+\tilde{z}) \approx E\left(U(W)+U'(W)\tilde{z}+\frac{U''(W)}{2}\tilde{z}^2\right)$$
$$= U(W)+U'(W)(-\pi)(taylor\ 1er\ ordre)$$
$$\Leftrightarrow U(W)+U'(W)E\tilde{z}+\frac{U''(W)}{2}\tilde{z}^2 = U(W)+U'(W)(-\pi)$$
$$or\ E\tilde{z}=0\ donc\ \tilde{z}^2=\sigma^2\,;\ E(X-EX)^2=V(x)$$
$$donc -\pi = \frac{1}{2}\frac{U''(W)}{U'(W)}\sigma^2$$

De plus,- $\frac{U''(W)}{U'(W)} = ARA\ (absolute\ risk\ aversion)$ mesure d'Arrow-Pratt du risque (dépendant de la pente de la courbe d'utilité positif si averse au risque)
Ici nous ne pouvons pas calculer par l'approximation car la fonction d'utilité n'est pas différenciable.

(d) $\frac{1}{2}U(7)+\frac{1}{2}U(13)=10-e \Leftrightarrow e=-0.75\ plus\ faible\ car\ \tilde{z} = w+\tilde{x}\ a\ une\ espérance\ d'utilité\ plus\ élevé\ tout\ en\ concervant\ la\ même\ epérance.$

<u>Exercice 2 : Assurance en information parfaite</u>

Un individu dispose d'une richesse initiale w et d'une propriété sujette à un risque d'incendie, de valeur L. Pour se protéger contre le risque l'individu peut souscrire une police d'assurance. L'assureur et l'individu ont le même à priori sur la probabilité d'incendie : p . L'individu peut décider du niveau de couverture q. L'assureur demande une prime d'assurance x et s'engage à indemniser l'assuré à hauteur de q en cas d'incendie.

On note $\pi(q,x,p)$ la fonction objectif de l'assureur supposé neutre vis-à-vis du risque et $u(w)$ la fonction d'utilité de l'individu.

(a) Quelle est l'utilité de réserve de l'individu ?
(b) Calculer le contrat Optimal (q^*,x^*) qui serait offert par l'assureur à un agent ayant une aversion pour le risque ?
(c) Combien coutera la prime x :
- **l'individu est neutre vis-à-vis du risque ?**
- **il y a concurrence pure et parfaite sur le marché de l'assurance ?**

(d) Montrer que si l'assureur et l'individu sont tous les deux averse au risque, ils signeront un contrat de coassurance (i.e. $q^* < L$).

<u>Correction :</u>

(a) $\bar{u} = pU(W)+(1-p)U(W+L)$
(b) Hyph : Agent averse au risque $u''(w)<0$
- Définir une contrainte de participation :

c

- Définir la fonction objectif : $p(x-q)+(1-p)x = x-pq\ linéaire$

Le problème : $\max_{\{x,q\}} x-pq\ \ sc. pU(w-x+q)+(1-p)U(W-x+L) \geq \bar{u}$
On pose le lagrangien :
$$x-pq+\lambda(\,pU(w-x+q)+(1-p)U(W-x)-\bar{u})$$
Condition de Kuhn-Tucker(KT)
$$\frac{d\mathcal{L}}{dx} = 1+\ \lambda\big(-xu'(w-x+q)-(1-p)u'(w-x+L)\big)=0\ (1)$$

$$\frac{d\mathcal{L}}{dq} = -p + \lambda\big(pu'(W-x+q)\big) = 0 \ (2)$$

$$\frac{d\mathcal{L}}{d\lambda} = pU(w-x+q) + (1-p)U(W-x) - \bar{u} = 0 \ contrainte\ saturée$$

Car profit fonction croissante de x et décroissante de q et fonction de la contrainte décroissante avec x et croissante avec q.

$$(1)\lambda = -\frac{1}{-pu'(w-x+q) - (1-p)u'(w-x+L)}$$

$$(2)\ \lambda = \frac{p}{pu'(W-x+q)}$$

$$(1) + (2)\ u'(W-x+q) = pu'(w-x+q) + (1-p)u'(w-x+L)$$
$$\Leftrightarrow u'(W-x+q) = u'(w-x+L)$$

L'individu étant averse au risque $u'(w) est\ monotone\ décroissante$ $(u''(w) < 0)$.
Nous avons donc $q^* = L$
Avec $q^* = L$ nous pouvons déterminer x^* :

$$(3)\ pU(w-x+L) + (1-p)U(W-x+L)) = pU(W) + (1-p)U(W+L)$$
$$\Leftrightarrow U(W-x+L) = pU(W) + (1-p)U(W+L)$$
$$\Leftrightarrow x^* = W + L - U^{-1}(\bar{u})$$

On s'assure qu'il s'agit bien d'un maximum et non d'un minimum et que la contrainte est bien respectée :

- La contrainte est saturée donc respectée (3)
- Calcul de la Hessienne

$$\mathrm{H} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial^2 x} & \frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial x\partial q} \\ \frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial q\partial x} & \frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial^2 q} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda(-u'(w-x+q) + xu''(w-x+q) + (1-p)u''(w-x+L)) & \lambda\big(-xu''(w-x+q)\big) \\ -\lambda\big(pu''(W-x+q)\big) & \lambda\big(pu''(W-x+q)\big) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda\big(-u'\big(U^{-1}(\bar{u})\big) + (W+L-U^{-1}(\bar{u}))u''(U^{-1}(\bar{u})) + (1-p)u''(U^{-1}(\bar{u}))\big) & \lambda\big(-(W+L-U^{-1}(\bar{u}))u''(U^{-1}(\bar{u}))\big) \\ -\lambda\big(pu''(U^{-1}(\bar{u}))\big) & \lambda\big(pu''(U^{-1}(\bar{u}))\big) \end{pmatrix}$$

$$\det(H) = \lambda^2\left(-u'\big(U^{-1}(\bar{u})\big) + \big(W+L-U^{-1}(\bar{u})\big)u''\big(U^{-1}(\bar{u})\big) + (1-p)u''\big(U^{-1}(\bar{u})\big)\right)\left(pu''\big(U^{-1}(\bar{u})\big)\right)$$
$$- \lambda^2\left(\big(W+L-U^{-1}(\bar{u})\big)u''^{\left(U^{-1}(\bar{u})\right)}\right)\left(pu''\big(U^{-1}(\bar{u})\big)\right)$$
$$\det(H) = \lambda^2\left(-u'\big(U^{-1}(\bar{u})\big) + (1-p)u''\big(U^{-1}(\bar{u})\big)\right)\left(pu''\big(U^{-1}(\bar{u})\big)\right) > 0$$

Définit positive car $u'' < 0$ donc $\det(H) > 0\ et\ Tr(H) < 0$
Donc la solution est bien un maximum. (Pas un point selle les deux valeurs propres sont de même signes).

(c)

- L'individu est neutre vis-à-vis du risque ce qui signifie que

$$EU(x) = UE(x)$$

Nous avons donc la contrainte de participation suivante :

$$pU(W+Q-x)+(1-p)U(W+L-x) \geq pU(W)+(1-p)U(W+L)$$
$$\Leftrightarrow U\big(p(W-Q-x)+(1-p)(W+L-x)\big) \geq U(pW-(1-p)(W+L)$$
$$\Leftrightarrow pq \geq x$$

Or l'assureur maximise :

$$x-pq$$

Donc le seul contrat accepté par l'individu qui maximise le profit de la firme ($=0$) est $x^* = pq$
Pour tout niveau de garantie choisit par l'individu.

- Il y a CPP : la firme ne fait pas de profit : $x-pq=0$ or nous avons vu que si l'agent est risque averse et que l'assureur est neutre vis-à-vis du risque, l'agent se couvre totalement vis-à-vis du risque ainsi : $x^* = pL$

4) L'assureur est averse au risque on introduit une « fonction d'utilité » de l'assureur $B(.)\ tq\ B'(.) > 0 et\ B''(.) < 0$.

On réécrit le problème de maximisation

$$\max_{\{x,q\}}(1-p)B(x)+p(B(x-q))\ \ sc.pU(w-x+q)+(1-p)U(W-x+L) \geq \bar{u}$$

On pose le Lagrangien :

$$\mathcal{L}=(1-p)B(x)+p\big(B(x-q)\big)+\lambda(pU(w-x+q)+(1-p)U(W-x+L)-\bar{u})$$

Condition KT :

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x}=(1-p)B'(x)+pB'(x-q)+\lambda\big(-pU'(w-x+q)\big)-(1-p)U'(W-x+L)=0\ (1)$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q}=-pB'(x-q)+\lambda\big(pU'(w-x+q)\big)(2)$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\lambda}=(pU(w-x+q)+(1-p)U(W-x+L)-\bar{u})=0\ contrainte\ saturé$$

$$(1)+(2)\lambda=\frac{(1-p)B'(x)+pB'(x-q)}{\big(pU'(w-x+q)\big)+(1-p)U'(W-x+L)}=\frac{B'(x-q)}{pU'(w-x+q)}$$

$$p+\frac{(1-p)U'(W-x+L)}{U'(W-x+q)}=p+\frac{(1-p)B'(x)}{B'(x-q)} \Leftrightarrow \frac{U'(W-x+L)}{U'(W-x+q)}=\frac{B'(x)}{B'(x-q)}$$

Numérateur : état de la nature si pas d'incendie
Dénominateur : état de la nature si incendie

Condition d'Arrow : égalité des utilités marginales relatives des deux agents averses aux risques→ partage du risque (autrement dit nous avons bien un équilibre Pareto optimal définit dans la boite d'Edgeworth comme le point tangent des fonctions d'utilité des deux agents).

Si les agents partage le risque nous avons : $W-x+L > W-x+q\ et\ x > x-q$

Etant donné que $B\ et\ U$ sont concave nous avons : $\frac{B'(x)}{B'(x-q)} < 1$ car
$B'est\ décroissant\ étant\ donné\ B'' < 0$

Ainsi : $\frac{U'(W-x+L)}{U'(W-x+q)} < 1 \Leftrightarrow\ U'(W-x+L) <\ U'(W-x+q) \Leftrightarrow W-x+L > W-x+q \Leftrightarrow L > q$

Exercice 2 : Relation d'emploi

Un agent exerce une activité professionnelle pour le compte d'un principal. Le résultat de la tâche qui lui est confiée peut-être un succès (état de la nature S) ou un échec (E).
Le résultat dépend du niveau d'effort fourni par l'agent, e, et d'un évènement aléatoire. L'agent reçoit un salaire $(w_s ou\ w_e)$ et subit un coût d'effort noté $v(e), ou\ v'(.) > 0\ et\ v''(.) > 0$. Le résultat dont bénéficie le principal est x_s avec une probabilité de $p_s(e)$ et x_e avec une probabilité de $p_E(e)$.

Les fonctions d'utilité Von Neumann–Morgenstern (VNM) des deux joueurs sont notées $B(.)$ et $u(.)$. L'utilité de réserve de l'agent est normalisée ($= 0$).

1- **On suppose que le principal vaut obtenir l'effort e_o. Ecrire le contrat optimal proposé par le principal lorsque :**

  - **L'agent est averse au risque et le principal neutre.**
  - **L'agent est neutre au risque et le principal averse.**

2- **Quel serait le résultat si agent et principal étaient tous deux averses aus risques ?**
3- **Quelle hypothèse faudrait-il ajouter pour que le principal se trouve confronté à un problème :**

  - **D'aléa moral ?**
  - **De sélection adverse ?**

Correction :

Rappel : fonction d'utilité de Von Neuman-Morgenstern :

-comparabilité, -transitivité, -indépendance, -continuité, -réduction des loteries composées.

Info symétrique : Eléments de connaissance communes.

Incertitude : état de la nature incertain

1)

Le principal maximise son profit sous contrainte que l'agent participe (i.e. que l'utilité tirée de sa participation soit supérieure à son utilité de réserve).

$$\Pi(e, w_s, w_e) = p_s(e)B(x_s - w_s) + p_E(e)B(x_E - w_E)$$

L'utilité espérée de l'agent est égale à :

$$EU(e, w_s, w_E) = p_s(e)U(w_s) + p_E(e)U(w_E) - v(e)$$

- agent averse : $u' > 0\ et\ u'' < 0$; principal neutre : $B' > 0\ et\ B'' < 0$

Problème : $\max_{\{w_e, w_s\}} p_s(e)B(x_s - w_s) + p_E(e)B(x_E - w_E)\ s.c.\ p_s(e)U(w_s) + p_E(e)U(w_E) - v(e) > 0$

On pose le Lagrangien associé au problème :
1er info un maximum global car la fonction objectif est strictement concave par rapport à $w_E et\ w_s$ de plus, la contrainte de l'agent est saturée.

$$\mathcal{L}(w_S, w_E, \lambda) = \boldsymbol{p_s(e)B(x_s - w_s) + p_E(e)B(x_E - w_E)} + \lambda\ (\boldsymbol{p_s(e)U(w_s) + p_E(e)U(w_E) - v(e)})$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_s} = -p_s(e)B'(x_s - w_s) + \lambda(p_s(e)U'(w_s)) = 0\ (1)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_E} = -p_E(e)B'(x_E - w_E) + \lambda(p_E(e)U'(w_E)) = 0\ (2)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = (\boldsymbol{p_s(e)U(w_s) + p_E(e)U(w_E) - v(e)}) = 0\ contrainte\ satur\text{é}$$

$$(1) + (2)\ \frac{U'(w_s)}{U'(w_E)} = \frac{B'(x_s - w_s)}{B'(x_E - w_E)}$$

Or $\frac{U'(w_s)}{U'(w_E)} = \frac{B'(x_s - w_s)}{B'(x_E - w_E)} = 1$ car l'agent est neutre vis-à-vis du risque
De plus, U' est monotone décroissante donc $w_E = w_s$
Ainsi, l'agent reçoit toujours le même salaire seul le principal supporte le risque. Donc pour inciter $e_0 nousa\ vons\ w_s = w_E = U^{-1}(v(e_0))$

- L'agent neutre : $u' > 0\ et\ u'' = 0$; le principal averse au risque $B' > 0\ et\ B'' < 0$

Même problème que précédemment donc :

$$\frac{B'(x_s - w_s)}{B'(x_E - w_E)} = 1$$

Ainsi, $x_s - w_s = x_E - w_E$, c'est l'agent qui prend tout le risque le principal reçoit toujours le même revenue.

$$w_s = x_s - x_E + w_E\ avec\ p_S(e_0)U(x_s - x_E + w_E) + p_E(e_0)U(w_E) = v(e_0)$$

2) Si les deux sont averse au risque ils vont partager le risque
$\frac{U'(w_s)}{U'(w_E)} = \frac{B'(x_s - w_s)}{B'(x_E - w_E)} \rightarrow condition\ d'Arrow.$ Les deux revenus seraient variables $w_s > w_E$ et $x_s - W_s > x_E - w_E$

3)

- Aléa moral : si l'effort n'est pas observable par le principal (asymétrie d'information), besoin de contraintes incitatives pour inciter l'effort

Rappel aléa moral : ne peut pas contrôler l'action de l'autre partie ou évaluer l'opportunité ;
Conséquence : si pas de contrainte incitative tout le monde va dire qu'il fait l'effort élevé.

- Sélection adverse : les agents sont de plusieurs type (ex : fainéant ou pas) et ce type est inconnu de l'agent (asymétrie d'information), besoin également de contraintes incitatives pour révéler les types.

Conséquences :anti sélection → un partie connait mieux les caractéristiques du bien échangé au moment de la signature (l'agent sait si il est fainéant ou pas).