TD2 : Economie de l'assurance M1 SAF

Mars 2016
2ème : Aléa Moral

<u>Ex 1 : Relation d'emploi avec action inobservable (1) :</u>

Un employeur neutre vis-à-vis du risque propose un contrat de travail à un agent, stipulant le salaire de l'agent en fonction de valeurs appropriées. L'agent peut accepter ou refuser le contrat. S'il l'accepte, il choisit son niveau d'effort faible ($a = 1$) ou élevé ($a = 2$). Le revenu de l'employeur peut prendre deux valeurs, 10 ou 30, dont les probabilités dépendent du niveau d'effort.

$Action$	10	30
$a = 1$	$2/3$	$1/3$
$a = 2$	$1/3$	$2/3$

La fonction d'utilité de l'agent dépend de son salaire et de son effort, et est telle que $u(w;\ a) = w - a + 1$. Son utilité de réserve vaut 1.

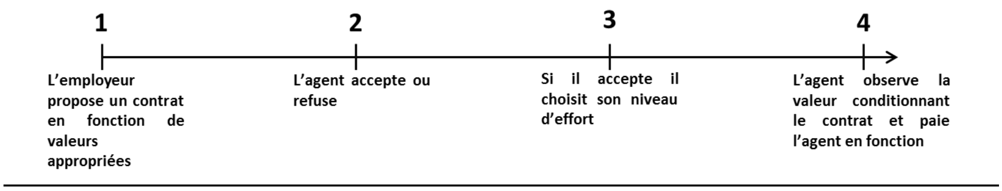
1. **On suppose d'abord que l'employeur observe l'effort du travailleur.**

- **Déterminer le contrat optimal, en calculant le revenu espéré de l'employeur.**

2. **On suppose maintenant que l'employeur n'observe pas l'effort de l'agent.**

   a) **Commenter et décrire la relation principal-agent**
   b) **Déterminer le contrat optimal qui serait proposé pour obtenir un effort élevé**
   c) **Calculer le revenu espéré de l'employeur**

<u>Correction :</u>



1)
Information symétrique :
L'employeur observe l'effort de l'agent il peut donc proposer un contrat en fonction de l'effort observer.

Si $a = 1$
Le profit de l'employeur est :

$$\Pi(w_1|a = 1) = \frac{2}{3}(10 - w_1) + \frac{1}{3}(30 - w_1)$$

Sous contrainte de participation de l'agent :

$$w_1 - 1 + 1 \geq 1 \Leftrightarrow w_1 \geq 1$$

On montre facilement que la contrainte de participation de l'agent est saturée. En effet, le profit de l'assureur est strictement décroissant avec w_1 tant dis que l'utilité procuré à l'agent pour un niveau d'effort $a = 1$ est strictement croissant avec w_1. Ainsi, à l'optimum nous avons donc :
$w_1^{FB} = 1$ $(first\ best\ sans\ asymétrie\ d'information)$.
Dans ce cas, le profit espéré de l'employeur est égal à: $\frac{2}{3}(9) + \frac{1}{3}(29) = \frac{47}{3}$

Si $a = 2$
Le profit de l'employeur est :

$$\Pi(w_2|a = 2) = \frac{1}{3}(10 - w_2) + \frac{2}{3}(30 - w_2)$$

Sous contrainte de participation de l'agent :

$$w_2 - 2 + 1 \geq 1 \Leftrightarrow w_2 \geq 2$$

On montre facilement que la contrainte de participation de l'agent est saturée. En effet, le profit de l'assureur est strictement décroissant avec w_2 tant dis que l'utilité procuré à l'agent pour un niveau d'effort $a = 2$ est strictement croissant avec w_2. Ainsi, à l'optimum nous avons donc :
$w_2^{FB} = 2$ $(first\ best\ sans\ asymétrie\ d'information)$.
Dans ce cas, le profit espéré de l'employeur est égal à: $\frac{1}{3}(8) + \frac{2}{3}(28) = \frac{64}{3}$

Ainsi, l'agent est indifférent entre fournir le niveau d'effort $a = 1$ et recevoir $w_1 = 1$ et fournir l'effort $a = 2$ et recevoir $w_2 = 2$. Cependant, le profit espéré de l'employeur est supérieur lorsque l'agent fournit un effort élevé ($a = 2$). Ainsi, il proposera uniquement le contrat $w_2 = 2$ conditionnellement à l'effort $a = 2$ et ne rémunèrera pas l'individu si il fournit un effort faible ($a = 1$).

2) Information asymétrique :
a) L'employeur n'observe pas l'effort de l'agent, il se retrouve donc dans une situation d'aléa moral. En effet, en conservant le contrat ci-dessus, chaque agent a intérêt à mentir sur son niveau d'effort et fournir $a = 1$ car $U(a = 2, w_2) < U(a = 1, w_2)$.

Ainsi, l'employeur à une utilité espéré de $\frac{1}{3}(28) + \frac{2}{3}(8) = \frac{44}{3}$. Le problème d'aléa moral lui coutera $\frac{20}{3}$ s'il ne met pas en place un système de rémunération plus efficace.

b) Afin d'inciter les agents à fournir un niveau d'effort élevé l'employeur doit mettre en place un contrat dépendant des observations possibles, soit la rémunération obtenue. Pour trouver le menu de contrat optimal il doit inclure dans son optimisation des contraintes dites incitatives en plus des contraintes participatives.

Ainsi, l'employeur payera l'agent w_1s'il observe le revenu faible (10) et w_2 s'il observe le revenu élevé (30). Sa fonction de profit est donc la suivante :

$$\Pi(w_1, w_2) = \frac{1}{3}(10 - w_1) + \frac{2}{3}(30 - w_2)$$

Sous contraintes de participations (l'agent doit accepter le contrat sous condition d'effort ($a = 2$) :

$$(CP)\frac{2}{3}w_2 + \frac{1}{3}w_1 - 2 + 1 \geq 1 \Leftrightarrow \frac{2}{3}w_2 + \frac{1}{3}w_1 \geq 2$$

Mais aussi que l'agent fournit bien un niveau d'effort élevé ($a = 2$) et donc que l'utilité espéré de l'agent à fournir un effort élevé est supérieure à celle résultante d'un effort faible :

$$(CI)\,\frac{2}{3}(\,w_2 - 2 + 1) + \frac{1}{3}(w_1 - 2 + 1) > \frac{1}{3}(w_2 - 1 + 1) + \frac{2}{3}(w_1 - 1 + 1)$$

$$\Leftrightarrow w_2 - w_1 \geq 3$$

On peut montrer facilement que les deux contraintes sont saturées. Graphiquement ou algébriquement :

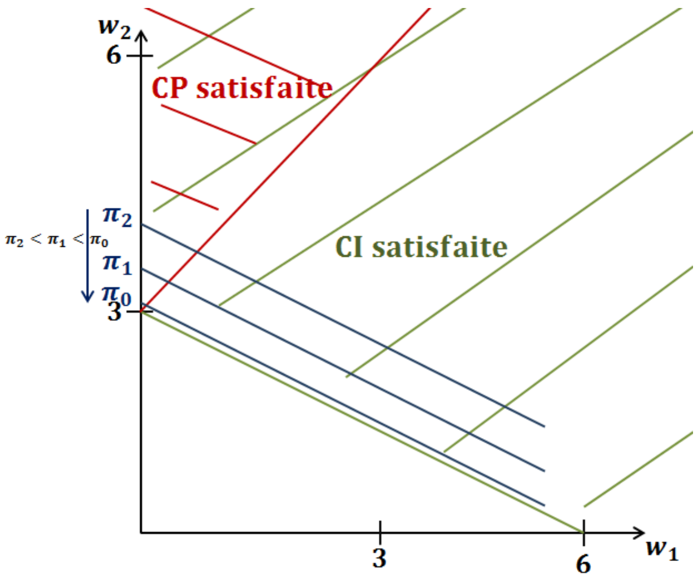
Graphiquement:

Notons la (CP) $w_2 \geq 3 - \frac{1}{2}w_1$ et (CI) $w_2 \geq 3 + w_1$

De plus pour tout niveau de profit $\bar{\pi}$ on note la fonction suivante :

$$\frac{1}{3}(10 - w_1) + \frac{2}{3}(30 - w_2) = \bar{\pi} \Leftrightarrow w_2 = 35 - \frac{3}{2}\bar{\pi} - \frac{1}{2}w_1$$

Graphiquement cela donne :



Algébriquement :

$\frac{\partial \Pi}{\partial w_1}<0$ et $\frac{\partial \Pi}{\partial w_2}<0$; L'employeur veut donc minimiser les revenus proposés tout en garantissant les contraintes.

On a donc, (CP) $w_2 \geq 3 - \frac{1}{2}w_1$ et (CI) $w_2 \geq 3 + w_1$,

Supposons les deux contraintes saturées, nous pouvons montrer que augmenté d'une unité infinitésimale w_1 ou w_2 détérioré le profit de l'employeur.

$$w_2^* = 3 - \frac{1}{2}w_1^*\ et\ w_2^* = 3 + w_1^* \ \Leftrightarrow w_1^* = 0\ et\ w_2^* = 3$$

Si l'employeur choisit ($w_2 = w_2^* + \epsilon_2, w_1 = w_1^* - \epsilon_1$), impossible car $w_1$ne peut pas être négatif.

Si l'employeur choisit ($w_2 = w_2^* - \epsilon_2, w_1 = w_1^*$), contrainte d'incitation n'est pas respecté.

Si l'employeur choisit ($w_2 = w_2^* - \epsilon_2, w_1 = w_1^* - \epsilon_1$), impossible car $w_1$ne peut pas être négatif.

Si l'employeur choisit ($w_2 = w_2^*, w_1 = w_1^* - \epsilon_1$), impossible car $w_1$ne peut pas être négatif.

Si l'employeur choisit ($w_2 = w_2^* - \epsilon_2, w_1 = w_1^* + \epsilon_1$), contrainte d'incitation n'est pas respecté.

D'autre part toute augmentation unilatérale ou bilatérale des revenus diminue le profit car :

$$\frac{\partial \Pi}{\partial w_1}<0 \; et \; \frac{\partial \Pi}{\partial w_2}<0$$

Autre solution plus longue et pas pertinente ici, poser le lagrangien.

c) Le revenu espéré de l'employeur est donc :

$$\Pi(0,3) = \frac{1}{3}(10) + \frac{2}{3}(27) = \frac{64}{3}$$

<u>Ex 2 : Relation d'emploi avec action inobservable (2)</u>

On considère une relation contractuelle entre un agent et un principal, dans laquelle deux résultats sont réalisables : 50 000 (succès) ou 25 000 (échec). Les probabilités de succès ou d'échec dépendent du niveau d'effort fourni par l'agent, qui peut prendre trois valeurs : e1 > e2 > e3.

Effort	**25000**	**50000**
e_1	**0.25**	**0.75**
e_2	**0.50**	**0.50**
e_3	**0.75**	**0.25**

La fonction d'utilité de l'agent dépend de son salaire et de son effort, et est telle que $u(w;\, e) = \sqrt{w} - v(e)$ avec $v(e_1) = 40, v(e_2) = 20 \; et \; v(e_3) = 5$. Son utilité de réserve vaut $\bar{u} = 120$.

1. **Dans le cas où l'information est symétrique :**

(a) Donner la forme du contrat optimal (pour tout niveau d'effort)

(b) Calculer le profit espéré pour chaque niveau d'effort, et identifier le contrat d'équilibre.

2. **On suppose maintenant qu'il y a asymétrie d'information : l'employeur n'observe pas l'effort de l'agent.**

(a) Donner le contrat optimal pour chaque niveau d'effort.

(b) Calculer le profit espéré dans chaque cas, et identifier le contrat d'équilibre.

<u>Correction :</u>

1) Information symétrique :

(a)

$$\Pi(e_{i,} w_i) = p_S(e_i)(50\,000 - w_i) + p_E(e_i)(25\,000 - w_i)$$

Sous contrainte :$f(w_i, e_i) = \sqrt{w_i} - v(e_i) \geq 120$

La contrainte est saturée car $\frac{\partial \Pi(e_{i,}w_i)}{\partial w_i} < 0$ et $\frac{\partial f(e_{i,}w_i)}{\partial w_i} > 0$

Ainsi, $w_i^{FB} = (120 + v(e_i))^2$

Ce qui donne : $w_1^{FB} = 25\,600\,; w_2^{FB} = 19\,600; w_3^{FB} = 15\,625$

(b)

$$\Pi(e_{1,}w_1) = 18\,150;\ \Pi(e_{2,}w_2) = 17\,900; \Pi(e_{3,}w_3) = 15\,625$$

Pour $w_1^{FB} = 25\,600\,; w_2^{FB} = 19\,600; w_3^{FB} = 15\,625$, l'agent est indifférent entre e_1, e_2, e_3 mais l'effort e_1 procure un profit supérieur à l'employeur. Ce sera donc le seul contrat proposé à l'agent.

2) Encore une fois, l'employeur fait face à un problème d'aléa moral il doit donc optimiser sous contrainte à la fois de participation et d'incitation.

(a)

Pour inciter e_1 :

$$\max_{\{w_E, w_S\}} 0.75\ (50000 - w_S) + 0.25(25000 - w_E)$$

$$s.c.\ \ (CP)\ 0.75\ \sqrt{w_S} + 0.25\sqrt{w_E} \geq 160$$

$$(CI)_{1vs2} 0.75\ \sqrt{w_S} + 0.25\sqrt{w_E} - 40 \geq 0.50\ \sqrt{w_S} + 0.50\sqrt{w_E} - 20 \Leftrightarrow \sqrt{w_S} - \sqrt{w_E} \geq 80$$

$$(CI)_{1vs3}\ 0.75\ \sqrt{w_S} + 0.25\sqrt{w_E} - 40 \geq 0.25\ \sqrt{w_S} + 0.75\sqrt{w_E} - 5 \Leftrightarrow \sqrt{w_S} - \sqrt{w_E} \geq 70$$

Ainsi $(CI)_{1vs2} \Longrightarrow (CI)_{1vs3}$

On pose le lagrangien :

$$\mathcal{L}(w_1, w_2, \lambda, \mu) = 0.75\ (50000 - w_S) + 0.25(25000 - w_E) + \lambda\left(\sqrt{w_S} - \sqrt{w_E} - 80\right) + \mu(0.75\ \sqrt{w_S} + 0.25\sqrt{w_E} - 160)$$

Les deux contraintes sont saturées : $\lambda > 0\ et\ \mu > 0$

$$\sqrt{w_S} - \sqrt{w_E} = 80\ et\ 0.75\ \sqrt{w_S} + 0.25\sqrt{w_E} = 160 \Leftrightarrow w_E^* = 19\,600\ et\ w_S^* = 48\,400$$

$$E(\Pi(19\,600{,}48\,400)) = 2\,250$$

Les deux contraintes ne sont pas saturées→ $w_s = w_E = 0\ (CI) et\ (CP) non\ respectés$

Seul (CI) est saturée : $\lambda > 0\ et\ \mu = 0$ → C KT

$$0.75 \times 2\sqrt{w_s} = \lambda\ et - 0.25 \times 2\sqrt{w_E} = \lambda\ et\ \sqrt{w_S} - \sqrt{w_E} = 80 \rightarrow impossible$$

Seul (CP) est saturée : $\lambda =\ \ et\ \mu > 0$ → C KT

$$\mu = 2\sqrt{w_S} = 2\sqrt{w_E}\ (CI) non\ respecté$$

Pour inciter e_2 :

$$\max_{\{w_E,w_S\}} 0.5\,(50000 - w_S) + 0.5(25000 - w_E)$$

$$s.c.\ \ (CP)\ 0.5\,\sqrt{w_S} + 0.5\sqrt{w_E} \geq 140$$

$$(CI)_{2vs1} 0.75\,\sqrt{w_S} + 0.25\sqrt{w_E} - 40 \leq 0.50\,\sqrt{w_S} + 0.50\sqrt{w_E} - 20 \Leftrightarrow \sqrt{w_S} - \sqrt{w_E} \leq 80$$

$$(CI)_{2vs3}\ 0.5\,\sqrt{w_S} + 0.5\sqrt{w_E} - 20 \geq 0.25\,\sqrt{w_S} + 0.75\sqrt{w_E} - 5 \Leftrightarrow \sqrt{w_S} - \sqrt{w_E} \geq 60$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(w_1, w_2, \lambda_1, \lambda_2, \mu) \\ &= 0.5\,(50000 - w_S) + 0.5(25000 - w_E) + \lambda_2\left(\sqrt{w_S} - \sqrt{w_E} - 60\right) \\ &+ \lambda_1\left(80 - \sqrt{w_S} + \sqrt{w_E}\right) + \mu(0.5\,\sqrt{w_S} + 0.5\sqrt{w_E} - 140)\end{aligned}$$

Les trois contraintes ne sont pas saturées→ $w_s = w_E = 0\ (CI) et\ (CP) non\ respectés$

Seul (CP) saturée : C KT→ $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \mu > 0$

$\mu = 2\sqrt{w_s} = 2\sqrt{w_E}$ → $(CI)_{2vs3} non\ respectée$

Seul $(CI)_{2vs3}\ saturée$ →$\lambda_1 = 0, \lambda_2 > 0, \mu = 0$ CKT :

$\lambda_2 = -0.5 \times 2\sqrt{w_E} = 0.5 \times 2\sqrt{w_S}\ \ (CI)_{2vs3} non\ respectée\ \lambda_2 = 0$

Seul $(CI)_{2vs1}\ saturée$ →$\lambda_1 > 0, \lambda_2 = 0, \mu = 0$ CKT :

$\lambda_1 = 0.5 \times 2\sqrt{w_E} = 0.5 \times 2\sqrt{w_S}\ \ (CI)_{2vs3} non\ respectée$

$(CP) et\ (CI)_{2vs1}$ Saturées : (→$(CI)_{2vs3}$vérifié) C KT :

$$0.5\,\sqrt{w_S} + 0.5\sqrt{w_E} = 140\ et\ \sqrt{w_S} - \sqrt{w_E} = 80\ \Rightarrow w_E = 10\,000\ et\ w_S = 32\,400$$

$$E(\Pi(10\,000{,}32400)) = 16\,300$$

$(CP) et\ (CI)_{2vs3}$ saturées : (→$(CI)_{2vs1}$vérifié) C KT :

$$0.5\,\sqrt{w_S} + 0.5\sqrt{w_E} = 140\ et\ \sqrt{w_S} - \sqrt{w_E} = 60\ \Rightarrow w_E = 12\,110\ et\ w_S = 28\,900$$

$$E(\Pi(12110{,}28900)) = 17\,000$$

Vérification d'un max local : signe de la Hessienne définie négative $\det(.) > 0\ et\ Tr(.) < 0$ et $\lambda_2\ et\ \mu > 0$

Pour inciter e_3

$$\max_{\{w_E,w_S\}} 0.25\,(50000 - w_S) + 0.75(25000 - w_E)$$

$$s.c.\ \ (CP)\ 0.25\,\sqrt{w_S} + 0.75\sqrt{w_E} \geq 125$$

$$(CI)_{3vs2} 0.25\,\sqrt{w_S} + 0.75\sqrt{w_E} - 5 \geq 0.50\,\sqrt{w_S} + 0.50\sqrt{w_E} - 20 \Leftrightarrow \sqrt{w_S} - \sqrt{w_E} \leq 60$$

$$(CI)_{3vs1}\ 0.75\sqrt{w_S} + 0.25\sqrt{w_E} - 40 \leq 0.25\sqrt{w_S} + 0.75\sqrt{w_E} - 5 \Leftrightarrow \sqrt{w_S} - \sqrt{w_E} \leq 70$$

Ainsi $(CI)_{3vs1} \Longrightarrow (CI)_{3vs2}$

$$\mathcal{L}(w_1, w_2, \lambda, \mu) = 0.25\,(50000 - w_S) + 0.75(25000 - w_E) + \lambda\left(70 - \sqrt{w_S} + \sqrt{w_E}\right) + \mu(0.25\sqrt{w_S} + 0.75\sqrt{w_E} - 125)$$

Aucune contrainte saturée→ impossible

(CP) saturée pas (CI)→ $w_S = w_E = 15625\ E(\Pi(15625,15625)) = 15625$

(CP) et (CI) saturées $w_S = 34225 w_E = 11025\ E(\Pi(11556.25,31506.25) = 14706.25$

Optimum :

$$w_E = 12\,110\ et\ w_S = 28\,900$$

$$E(\Pi(12110,28900)) = 17\,000$$

$Cela\ coute\ trop\ cher\ d'inciterl'agent\ au\ dela\ de\ e_2$