TD n°4 : Théorie des Jeux en information complète :

Economie de l'assurance IR SAF

Avril 2016

Rappel :

Information complète :
Chaque joueur connait :
- ses possibilités d'actions
- les possibilités d'action des autres joueurs
- les gains résultants de ces actions
- les motivations des autres joueurs

Information parfaite :
Chaque joueur à une connaissance parfaite de toute l'histoire du jeu au moment de prendre une décision.

Information incomplète→ info imparfaite (l'inverse n'est pas vrai)

Exercice 1 : Dilemme du prisonnier

Deux cambrioleurs, notés 1 et 2 sont arrêtés par la police et placés en garde à vue dans des cellules différentes. Les preuves sont insuffisantes pour les inculper et la police leur propose la solution suivante. S'ils avouent tous les deux, chacun sera condamné à 3 ans de prison (dans ce cas l'utilité de chacun est de 1). Si seulement l'un des deux avoue, il sera libéré et servira de témoins contre l'autre (dans ce cas, l'utilité de celui qui avoue est égale à 4 et celle de l'autre à 0). Si aucun des deux n'avoue, ils seront inculpés pour un délit mineur et condamnés à 1 an de prison (dans ce cas, l'utilité de chacun est égale à 3).

1) **Après avoir identifié les différentes composantes de ce jeu stratégique, donner la forme normale et extensive de ce jeu.**
2) **Déterminer l'équilibre en stratégies dominantes et l'équilibre de Nash résultant.**

Correction :

Le jeu est non coopératif (ils ne se mettent pas d'accord sur le choix de la stratégie), il est simultané. On assume que les deux individus ne pourront pas avoir de représailles en cas de déviance.
Le jeu est à information complète mais imparfaite car au moment de prendre ça décision le joueur ne connait pas la décision de l'autre.

1) Jeux sous forme normale :

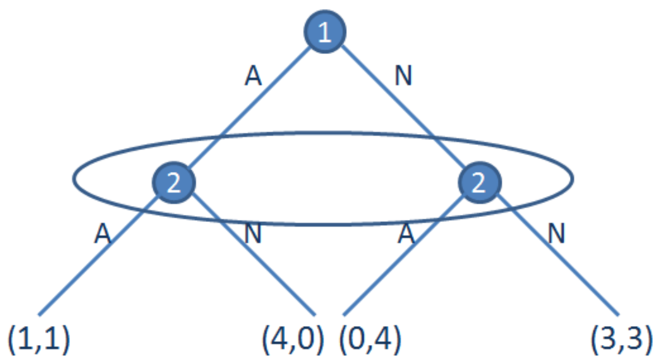
$$N = \{1; 2\}$$
$$S_1 = S_2 = \{nier; avouer\} = \{n; a\}$$

$$Profils\ de\ stratégies\ possibles: S = S_1 \times S_2 = \{(n,n);(a,a);(a,n);(n,a)\}$$
$$Paiements:$$
$$U_1(n,n) = U_2(n,n) = 3$$
$$U_1(a,a) = U_2(a,a) = 1$$
$$U_1(a,n) = U_2(n,a) = 4$$
$$U_1(n,a) = U_1(a,n) = 0$$

Matrice de paiement :

$J1\backslash J2$	A	N
A	$(1,1)$	$(4,0)$
N	$(0,4)$	$(0,0)$

Jeux sous forme extensive :



2) Equilibre en stratégies dominantes et équilibre de Nash du jeu.

Une stratégie est dominante pour un joueur si la stratégie est choisie par le joueur quelque soit les stratégies des autres joueurs.

$$Si\ J_2\ joue\ A\,; S_1^*(A) = A\ \ car\ \mathrm{U}_1(\mathrm{A},\mathrm{A}) = 1 \geq \mathrm{U}(\mathrm{N},\mathrm{A}) = 0$$

$$Si\ J_2\ joue\ N\,; S_1^*(N) = A\ \ car\ \mathrm{U}_1(\mathrm{A},\mathrm{N}) = 4 \geq \mathrm{U}(\mathrm{N},\mathrm{A}) = 3$$

Ainsi peu importe ce que joue le joueur 2, 1 à toujours intérêt à jouer la stratégie Avouer. La stratégie « avouer » et donc une stratégie dominante pour le joueur 1. Les paiements étant symétriques le même raisonnement peut s'appliquer pour le joueur 2. Ainsi l'équilibre de Nash de ce jeu est (A, A) c'est un équilibre de Nash parfait.

Pourquoi parfait : car ne comprend qu'une seule stratégie, il n'est pas composé de probabilité de jouer telle ou telle stratégie.

Rappel définition équilibre de Nash : Un équilibre de Nash est un ensemble de stratégies tel que pour chaque joueur sa stratégie et la meilleure réponse étant donné les stratégies, appartenant à l'équilibre, des autres. Personne n'a intérêt à dévier. Ici $S_1^*(A) = A\ et\ S_2^*(A) = A$.

<u>Exercice 2:</u> Bataille des sexes et jeu de coordination

Un couple désire sortir ensemble, mais l'homme et la femme ne sont pas d'accord sur le spectacle. Monsieur désire assister à un match de boxe, madame à un spectacle de danse. S'ils vont à la danse, Monsieur (resp. Madame) a une utilité égale à 1 (resp. 2) ; et s'ils vont au match de boxe,

Monsieur (resp. Madame) a une utilité de 2 (resp. 1). S'ils sont séparés, ils ont tous les deux une utilité nulle.

1) **Après avoir identifié les différentes composantes de ce jeu stratégique, donner la forme normale de ce jeu et représenter ce jeu sous forme extensive.**
2) **Les joueurs peuvent-ils se coordonner ?**
3) **Déterminer l'équilibre en stratégies dominantes.**
4) **Répondre aux questions 1 et 2 lorsque, sils vont au match de boxe (resp . spectacle de danse), l'utilité est égale à 2 (resp. 1) pour chacun.**

<u>Correction :</u>

1) Le jeu est simultané et non coopératif. L'information est incomplète et parfaite.

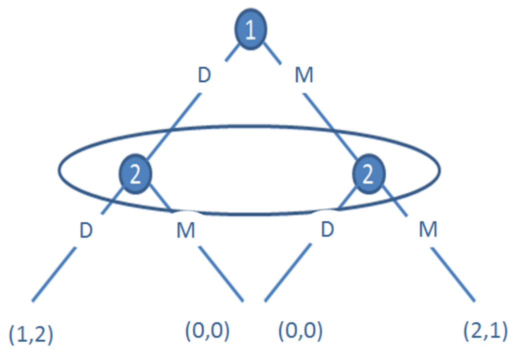
Jeu sous forme normale :

$$N = \{1; 2\}$$
$$S_1 = S_2 = \{match; danse\} = \{m; d\}$$
$$Profils\ de\ stratégies\ possibles: S = S_1 \times S_2 = \{(m,m); (d,d); (m,d); (d,m)\}$$
$$Paiements:$$
$$U_1(m,m) = U_2(d,d) = 2$$
$$U_1(d,d) = U_2(m,m) = 1$$
$$U_1(m,d) = U_2(d,m) = U_1(d,m) = U_1(m,d) = 0$$

Matrice de paiement :

$J1\backslash J2$	D	M
D	(1,2)	(0,0)
M	(0,0)	(2,1)

Forme extensive :



2) Le plus important pour les deux joueurs est de se coordonner mais chacun d'eux a une préférence contrastée avec celle de l'autre. Bien que les deux souhaitent se coordonner, ils arrivent toujours à des résultants conflictuels.

En effet aucune stratégie n'est strictement dominé ou dominante.

3)

$$Si\ J_2\ joue\ D\ ; S_1^*(D) = D\ \ car\ \mathrm{U_1(D,D) = 1 \geq U(M,D) = 0}$$

$$Si\,J_2\ joue\ M\ ; S_1^*(M) = M\ \ car\ \mathrm{U}_1(M,M) = 2 \geq \mathrm{U}(D,M) = 0$$

Et

$$Si\,J_1\ joue\ D\ ; S_2^*(D) = D\ \ car\ \mathrm{U}_2(\mathrm{D},\mathrm{D}) = 2 \geq \mathrm{U}(\mathrm{M},\mathrm{D}) = 0$$

$$Si\,J_1\ joue\ M\ ; S_2^*(M) = M\ \ car\ \mathrm{U}_2(M,M) = 1 \geq \mathrm{U}(D,M) = 0$$

Cependant il y a deux équilibres de Nash $(M,M)et\ (D,D)$ dans ce jeu.

En effet : $S_1^*(D) = D\ et\ S_2^*(D) = D$ et $S_1^*(M) = M\ et\ S_2^*(M) = M$

Ainsi, tout jeux comportent deux (ou plus) équilibres de Nash en stratégie pure comprend aussi un équilibre de Nash en stratégie mixtes. Attention l'inverse n'est pas vrai !

Comment déterminer l'équilibre de Nash mixte. On pondère chaque stratégie par une probabilité de la choisir. Et nous devons déterminer les probabilités d'équilibre.

Supposons que J_1 joue D avec proba p et M avec proba $(1-p)$ et J_2 joue D avec proba q et M avec proba $(1-q)$.

Nous avons donc :

$$U_1(D, pD + (1-p)M) = p \times 1 + (1-p) \times 0 = p$$

$$U_1(M, pD + (1-p)M) = p \times 0 + (1-p) \times 2 = 2(1-p)$$

De plus,

$$U_2(qD + (1-q)M, M) = q \times 0 + (1-q) \times 1 = (1-q)$$

$$U_2(qD + (1-q)M, D) = q \times 2 + (1-q) \times 0 = q$$

Ainsi pour quelle valeur de p le joueur 1 joue toujours M

$$U_1(M, pD + (1-p)M) > U_1(D, pD + (1-p)M) \Leftrightarrow 2 - 2p > p \Leftrightarrow p < \frac{3}{2}$$

Ainsi pour $p < \frac{3}{2}$ nous avons $q = 0$ et $p = \frac{3}{2}$ indifférent entre jouer $M\ ou\ D$ et si $p > \frac{2}{3}\ q = 1$;

On a donc $S_1^* = q^*(p) = \begin{cases} 1\ si\ p > \frac{2}{3} \\ (0{,}1)\ si\ p = \frac{2}{3} \\ 0\ si\ p < \frac{2}{3} \end{cases}$

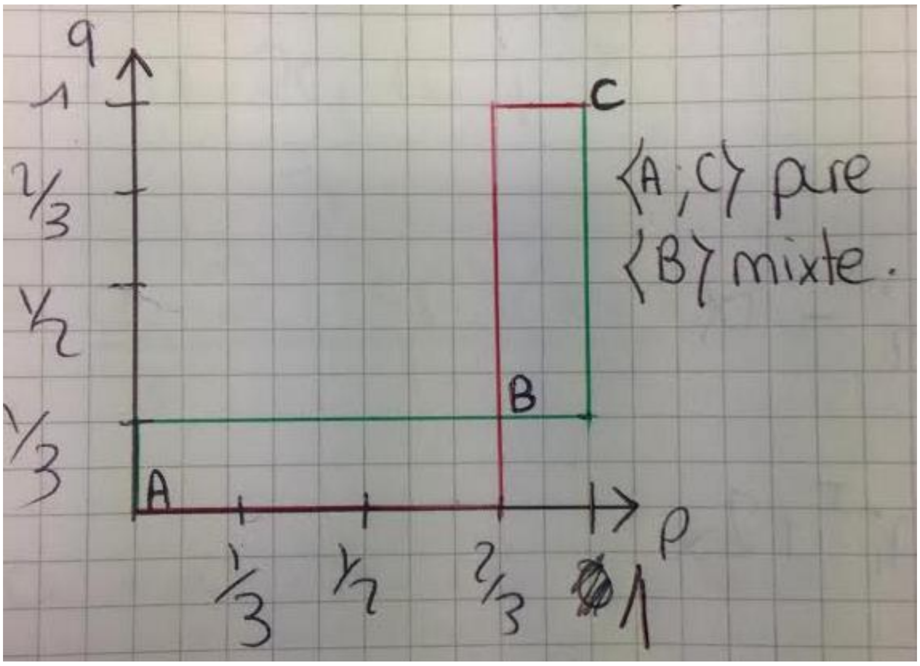
Inversement :

Ainsi pour quelle valeur de q le joueur 2 joue toujours M

$$U_2(qD + (1-q)M, M) > U_2(qD + (1-q)M, D) \Leftrightarrow 1 - q > 2q \Leftrightarrow q < \frac{1}{3}$$

On a donc $S_2^* = p^*(q) = \begin{cases} 1 \; si \; q > \frac{1}{3} \\ (0,1) \; si \; q = \frac{1}{3} \\ 0 \; si \; q < \frac{1}{3} \end{cases}$

On a donc les deux fonctions de réactions des joueurs et le ou les équilibre(s) Nash mixte(s) sont tous les cordonnées (p, q) tel que les fonctions de réactions se croisent.



Ainsi, l'équilibre en stratégie mixte de ce jeu est : $(\frac{1}{3}D + \frac{2}{3}M, \frac{2}{3}D + \frac{1}{3}M)$

4) Le jeu est simultané et non coopératif. L'information est incomplète et parfaite.

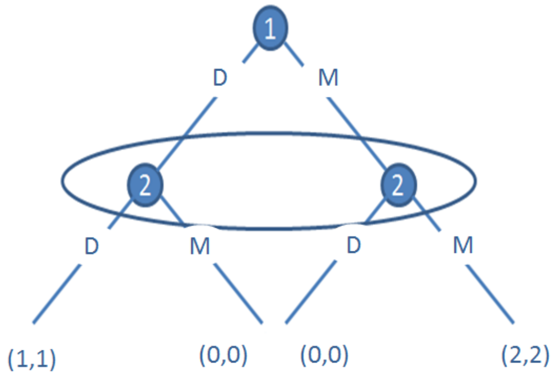
Jeu sous forme normale :

$$N = \{1; 2\}$$
$$S_1 = S_2 = \{match; danse\} = \{m; d\}$$
$$Profils\ de\ stratégies\ possibles: S = S_1 \times S_2 = \{(m,m); (d,d); (m,d); (d,m)\}$$
$$Paiements:$$
$$U_1(m,m) = U_2(m,m) = 2$$
$$U_1(d,d) = U_2(d,d) = 1$$
$$U_1(m,d) = U_2(d,m) = U_1(d,m) = U_1(m,d) = 0$$

Matrice de paiement :

$J1 \backslash J2$	D	M
D	(1,1)	(0,0)
M	(0,0)	(2,2)

Forme extensive :



Les joueurs peuvent se coordonné en choisissant(M, M), les intérêts ne sont pas conflictuels.

<u>Exercice 3:</u> Modèle de Rubinstein (1982)

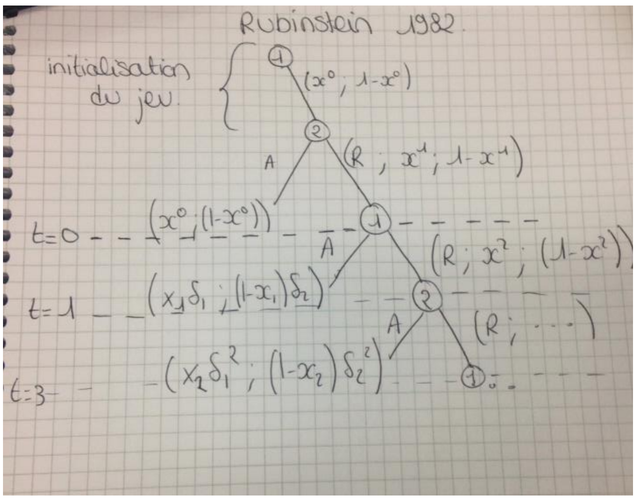
Supposons deux joueurs souhaitant se partager un gâteau d'une taille fixe normalisée à 1. L'un des deux joueurs commence le jeu en proposant une séparation du gâteau. Le second joueur accepte ou refuse, si il refuse la proposition du premier joueur il doit proposer une nouvelle séparation du gâteau.
Cependant, chaque proposition est couteuse pour l'individu, autrement dit plus les échanges sont nombreux plus l'utilité procuré par la part de gâteau finalement acquise diminue.
Ainsi nous rajoutons un facteur d'escompte psychologique noté $\delta_i \in (0,1)$.

Ainsi $\forall i = \{1,2\}$; chaque joueur i demande $x_i^t \in (0,1)$ à la période t. La fonction d'utilité de chaque joueur est la suivante : $U_i(x_i^t) = x_i\delta_i^t$.

1) **Représenter sous forme extensive ce jeu stratégique.**
2) **Déterminer l'équilibre de Nash de ce jeu. Existe-t-il un équilibre de Nash en stratégies pures ? En déduire les valeurs d'équilibres.**
3) **Que se passe-t-il lorsque l'on fait tendre le délai d'interaction vers 0 ?**

<u>Correction :</u>

1)



2)
Prenons $\underline{v_i}$ (resp. $\underline{v_j}$) le paiement minimum de l'individu i $(resp. j)$ et $\overline{v_i}$ $(resp. \overline{v_j})$ le paiement maximum de l'individu i $(resp\ j.)$ dans le sous jeu ou i (resp. j) propose l'offre initiale.

Le joueur j n'acceptera aucune proposition qui lui procure moins que le minimum qu'il peut avoir s'il refuse donc :

$$\delta_j \underline{v_j} \leq (1 - \overline{v_i}) \Leftrightarrow \overline{v_i} \leq (1 - \delta_j \underline{v_j})(1)$$

Autrement dit au minimum i doit lui garantir un paiement supérieur ou égal au paiement minimum qu'il aura si il refuse
D'autre part, le joueur j acceptera toutes les propositions qui lui procurent un paiement supérieur au maximum qu'il aura s'il refuse, or i n'a aucun intérêt de proposer un paiement à la fois supérieur au minimum et supérieur au maximum car cela lui fait diminuer son propre paiement alors qu'il peut tout à fait proposer un paiement maximum inférieur étant donné qu'il propose déjà un paiement minimum supérieur tout en garantissant l'acceptation de l'offre sous les contrats suivants.

D'autre part, nous pouvons répliquer le raisonnement pour le joueur j.

$$\delta_j \overline{v_j} \geq \left(1 - \underline{v_i}\right) \Leftrightarrow \underline{v_i} \geq 1 - \delta_j \overline{v_j}\ (2)$$

Par raisonnement symétrique nous avons aussi :

$$\overline{v_j} \leq (1 - \delta_i \underline{v_i})(3)$$

Et

$$\underline{v_j} \geq 1 - \delta_i \overline{v_i}$$

Avec $(1) + (2)\ et\ (3) + (4)$on en déduit :

$$\overline{v_i} - \underline{v_i} \leq \delta_j \left(\overline{v_j} - \underline{v_j}\right)(5)$$

$$et$$

$$\overline{v_j} - \underline{v_j} \leq \delta_i \left(\overline{v_i} - \underline{v_i}\right)(6)$$

En multipliant (5) par δ_i nous avons :

$$\overline{v_j} - \underline{v_j} \leq \delta_i (\overline{v_i} - \underline{v_i}) \leq \delta_j \delta_i \left(\overline{v_j} - \underline{v_j}\right)$$

Ainsi,

$$\overline{v_j} - \underline{v_j} \leq \delta_j \delta_i \left(\overline{v_j} - \underline{v_j}\right)$$

Etant donné que $\delta_j \delta_i \leq 1$ nous avons donc $\overline{v_j} = \underline{v_j} = v_j$ même raisonnement pour trouver v_i.
On peut donc remplacer dans $(1) + (2) + (3) + (4)$
On trouve donc : $v_i = 1 - \delta_j v_j\ et\ v_j = 1 - \delta_i v_i \Leftrightarrow v_i^* = \frac{1-\delta_j}{1-\delta_i \delta_j}\ \ 1 - v_i^* = \frac{\delta_j(1-\delta_i)}{1-\delta_i \delta_j} = \delta_j v_j^*$
Etant donné que nous avons $1 - v_i^* = \delta_j v_j^*$ j est indifférents et accepte l'offre.

Ainsi, le deuxième joueur acceptera la première proposition conduisant à un accord immédiat et sans délais. (stratégie pure).
D’autre part on remarque que plus le joueur est patient plus il tire avantage de sa patiente dans le paiement final.

D’autre part nous remarquons que le premier annonceur tire avantage de sa position puisque : $v_i^* \leq \delta_i v_i^*$.
Il y a donc gain de préemption, c’est à dire une lutte pour le premier coup.

3)

Lorsque le délai d’interaction tend vers 0 alors $\delta_i^t \to 1 \; car \; t \to 0$ ainsi l’avantage du premier coup disparait.